

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خ

Math

@Flow_KonKour

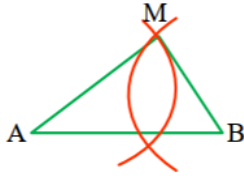


@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱



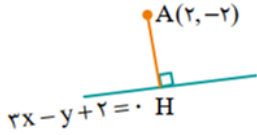
از B، کمانی می‌زنیم به اندازه ۲، یعنی: $BM = 2$

از A، کمانی می‌زنیم به اندازه ۳، یعنی: $AM = 3$

چون $M = 90^\circ$ ، پس مثلث ABM ، قائم‌الزاویه است، پس $AB = \sqrt{4+9}$ ، پس: $d = \sqrt{13}$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲



$$AH = \frac{|3 \times 2 - (-2) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

اندازه اضلاع مثلث را حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}$$

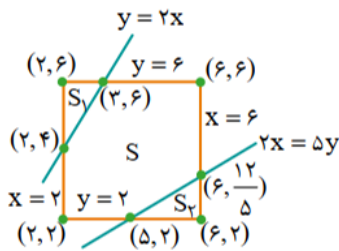
$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16}$$

$$BC = \sqrt{(5-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$$

توجه کنید که $AB = BC$ و $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ، بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴



$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

$$16 - \frac{6}{5} = \frac{74}{5}$$

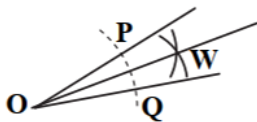
در شکل مقابل، معادلات خط‌ها و مختصات نقاط روی شکل معین شده است.

مجموع مساحت مثلث‌ها برابر است با:

طول ضلع مربع برابر ۴ و مساحت آن برابر ۱۶ است. پس مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

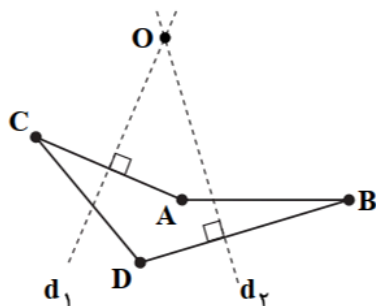


طبق متن کتاب برای رسم نیمساز، لازم است که دهانهٔ پرگار را کمی بیشتر از نصف طول پاره خط PQ باز کرده و دو کمان یکی به مرکز P و دیگری به مرکز Q بزنیم تا همدیگر را در نقطهٔ W قطع کنند. OW نیمساز زاویهٔ O است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶

نکته: نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره خط، به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارند و هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.



اگر $OA = OC$ باشد، پس O روی عمودمنصف پاره خط AC قرار دارد (خط d_1) و اگر $OB = OD$ باشد، پس O روی عمودمنصف پاره خط BD قرار دارد (خط d_2). پس برای اینکه هر دو تساوی برقرار باشد باید O روی محل برخورد خط d_1 و d_2 باشد که با توجه به شکل، فقط یک نقطه مانند O وجود خواهد داشت.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷

نکته: برای رسم عمودمنصف یک پاره خط، باید کمان‌هایی با شعاع بیشتر از نصف طول پاره خط، از دو سر پاره خط رسم کنیم.

با توجه به نکته بالا، باید x از $\frac{6}{3} = 2$ بزرگ‌تر باشد. با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: معادله خط گذرا از نقطه (x_1, y_1) با شیب m عبارت است از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

نکته: فاصله نقطه (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

راه حل اول:

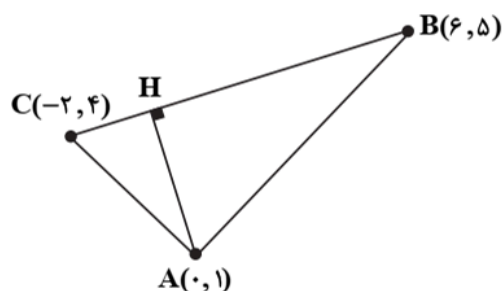
ابتدا معادله ضلع BC را می نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 5}{-2 - 6} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$y - 4 = \frac{1}{8}(x + 2) \Rightarrow 8y - 32 = x + 2 \Rightarrow 8y - x - 34 = 0$$

حال فاصله نقطه $A(0, 1)$ را از خط $8y - x - 34 = 0$ محاسبه می کنیم:

$$AH = \frac{|8 - 0 - 34|}{\sqrt{64 + 1}} = \frac{26}{\sqrt{65}}$$



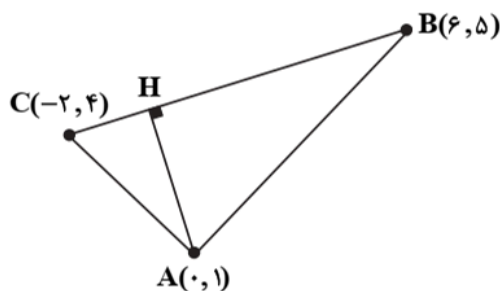
راه حل دوم:

نکته: طول پاره خط AB برابر است با: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

نکته: مساحت مثلث، برابر نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده نظیر آن است.

نکته: مساحت مثلث قائم الزاویه، برابر نصف حاصل ضرب اندازه های دو ضلع قائمه است.

نکته (عکس قضیه فیثاغورس): اگر در مثلثی، مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.



$$AB = \sqrt{(6 - 0)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$$

$$\sqrt{65}^2 = (2\sqrt{13})^2 + \sqrt{13}^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{ABC} \text{ قائم الزاویه است.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times \sqrt{13} = 13$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AH \times \sqrt{65} = 13 \Rightarrow AH = \frac{26}{\sqrt{65}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{65}$$

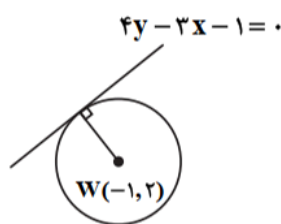
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

نکته: خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است، پس فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن، برابر شعاع دایره است.
با توجه به نکات بالا داریم:

$$R = \frac{|4(2) - 3(-1) - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

بنابراین قطر دایره برابر $2R = 4$ است.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB ، عبارت است از:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ ، برابر است با:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مختصات وسط پاره خط AB را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} A(2, 4) \\ B(-2, 1) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2-2}{2}, \frac{4+1}{2}\right) \Rightarrow M\left(0, \frac{5}{2}\right)$$

اکنون فاصله نقطه $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$ را از خط $3x - 4y - 5 = 0$ به دست می آوریم:

$$h = \frac{|3(0) - 4\left(\frac{5}{2}\right) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

حالا طول پاره خط AB را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

پس خواسته سؤال برابر: $\frac{3}{5} = 0/6$ است.

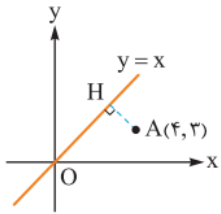
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۱

گام اول: فاصله نقطه $A(4, 3)$ از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم.

گام دوم: فاصله نقطه $A(4, 3)$ از نیمساز ربع اول را به دست می‌آوریم.

$$OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



$$y = x \Rightarrow y - x = 0$$

$$AH = \frac{|3 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{OA}{AH} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 5\sqrt{2}$$

گام سوم: خواسته سؤال $\frac{OA}{AH}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲

گام اول: ابتدا شیب خط d را به دست می‌آوریم.

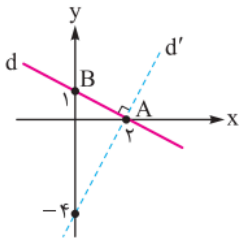
$$m_d = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

گام دوم: خط d' بر خط d عمود است؛ پس شیب d' قرینه و معکوس شیب خط d است.

$$m_{d'} = -\frac{1}{m_d} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

گام سوم: خط d' با شیب $m_{d'} = 2$ از نقطه $A(2, 0)$ عبور می‌کند. معادله این خط را می‌نویسیم.

$$d': y - 0 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -4$$

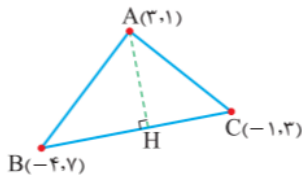


(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا یک شکل فرضی رسم می کنیم:



ارتفاع AH برابر با فاصله نقطه A از پاره خط BC است؛ پس معادله پاره خط BC را می نویسیم:

$$y - y_C = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}(x - x_C) \Rightarrow y - 3 = \frac{7 - 3}{-4 + 1}(x + 1)$$

$$\Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 9 = -4x - 4 \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0$$

$$AH = \frac{|4 \times 3 + 3 \times 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

گام دوم: طول ارتفاع AH را محاسبه می کنیم:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

گام سوم: طول ضلع BC برابر است با:

گام چهارم: طول ضلع BC، به اندازه ۳ واحد بیشتر از طول ارتفاع AH است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: برای حل یک معادله رادیکالی می توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب های حاصل در معادله اولیه صدق می کنند.

$$\sqrt{3 - \sqrt{x}} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{3 - \sqrt{x}})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 3 - \sqrt{x} = 3 \Rightarrow -\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

جواب به دست آمده، در معادله اولیه صدق می کند، پس معادله یک ریشه حقیقی دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: دو خط غیرموازی با محورهای مختصات، در صورتی بر هم عمودند که حاصل ضرب شیب هایشان برابر -۱ باشد.

نکته: دو خط در صورتی موازی اند که شیب هایشان با هم برابر باشد.

$$\text{با توجه به اینکه دو خط } y = 2x + \frac{1}{3} \text{ و } y = \frac{m}{3}x + \frac{4}{3} \text{ بر هم عمود هستند، داریم:}$$

$$\left(\frac{m}{3}\right)(2) = -1 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

حال با جایگذاری مقدار m، معادله خط $y = mx + 7$ به فرم $y = -\frac{3}{2}x + 7$ درمی آید که شیب آن برابر $-\frac{3}{2}$ است. در بین گزینه ها تنها شیب خط گزینه ۱ برابر $-\frac{3}{2}$ است. پس گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AC عبارت است از:

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2}$$

نکته: طول پاره خط BM برابر است با:

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$M\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{3+9}{2}\right) \Rightarrow M(3, 6)$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{(3+2)^2 + (6+6)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۷

راه حل اول:

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها به ترتیب برابر $S = \frac{-b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ است.

طبق فرض $x = 3$ و $x = 5$ ریشه‌های معادله $x^2 - 2ax + b + 4 = 0$ هستند. پس با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} S = 3 + 5 = 2a \Rightarrow a = 4 \\ \Rightarrow a + b = 15 \\ P = 3 \times 5 = b + 4 \Rightarrow b = 11 \end{cases}$$

راه حل دوم:

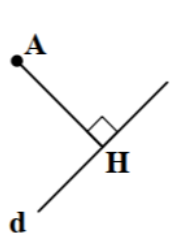
چون $x = 3$ و $x = 5$ صف‌های تابع $f(x) = x^2 - 2ax + b + 4$ هستند، پس ضابطه تابع به صورت

$$\begin{cases} -2a = -8 \Rightarrow a = 4 \\ \Rightarrow a + b = 15 \\ b + 4 = 15 \Rightarrow b = 11 \end{cases} \quad \text{از مقایسه این دو عبارت نتیجه می‌گیریم:} \quad f(x) = (x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۸

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای محاسبه ضلع مربع کافی است فاصله رأس A تا ضلع مقابل آن را محاسبه نماییم:

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|6 - (-1) + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = \left(\frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{64}{10} = 6.4$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۱۹

نکته: معادله خط گذرا از نقطه (x_1, y_1) با شیب m عبارت است از:

نکته: فاصله نقطه (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا معادله ضلع BC را می‌نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 5}{-2 - 6} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$y - 4 = \frac{1}{8}(x + 2) \Rightarrow 8y - 32 = x + 2 \Rightarrow 8y - x - 34 = 0$$

حال فاصله نقطه $A(0, 1)$ را از خط $8y - x - 34 = 0$ محاسبه می‌کنیم:

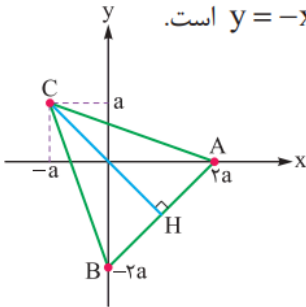
$$AH = \frac{|8 - 0 - 34|}{\sqrt{64 + 1}} = \frac{26}{\sqrt{65}}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: با فرض مثبت بودن a ، نقاط را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم:

$$\text{گام دوم: مثلث } ABC \text{ متساوی الساقین است: } AC = BC = \sqrt{(3a)^2 + (a)^2} = |a|\sqrt{10}$$

پس ارتفاع بر قاعده AB ، نیمساز رأس C نیز هست. یعنی ارتفاع CH باید از مبدأ نیز بگذرد، پس معادله آن $y = -x$ است.



روش دوم:

$$\text{گام اول: شیب ارتفاع } CH \text{ قرینه و معکوس شیب ضلع } AB \text{ است: } m_{AB} = \frac{0 - (-2a)}{3a - 0} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{CH} = \frac{-1}{m_{AB}} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{گام دوم: این ارتفاع از نقطه } C \text{ نیز می‌گذرد، پس معادله آن به صورت مقابل به دست می‌آید: } CH: y = -\frac{3}{2}(x + a) + a \Rightarrow y = -x$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\text{گام اول: طول اضلاع مثلث } ABC \text{ را به دست می‌آوریم: } AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$AC = \sqrt{(\alpha-2)^2 + (\beta-0)^2} = \sqrt{(\alpha-2)^2 + \beta^2}$$

$$BC = \sqrt{(\alpha+2)^2 + (\beta-4)^2}$$

گام دوم: طول اضلاع AC و BC را برابر هم قرار می‌دهیم و رابطه‌ای بین α و β پیدا می‌کنیم:

$$AC = BC \Rightarrow \sqrt{(\alpha-2)^2 + \beta^2} = \sqrt{(\alpha+2)^2 + (\beta-4)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 + \beta^2 - 8\beta + 16 \Rightarrow 8\beta = 8\alpha + 16 \xrightarrow{\div 8} \beta = \alpha + 2$$

گام سوم: طول اضلاع AB و AC را برابر هم قرار می‌دهیم و مقدار β را برحسب α جای گذاری می‌کنیم:

$$AC = AB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-2)^2 + \beta^2} = \sqrt{32} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha-2)^2 + \beta^2 = 32 \xrightarrow{\beta=\alpha+2} (\alpha-2)^2 + (\alpha+2)^2 = 32$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 32 \Rightarrow 2\alpha^2 = 24 \Rightarrow \alpha^2 = 12 \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

گام اول: فاصله نقطه A از خط و هم‌چنین نقطه B به دست می‌آوریم:

$$y - 2x - 6 = 0 \Rightarrow AH = \frac{|m - 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|m - 6|}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (m+4)^2} = \sqrt{m^2 + 8m + 17}$$

گام دوم: حال رابطه بین AB و AH را می‌سازیم:

$$\xrightarrow{AH = \frac{1}{6}AB} \frac{|m-6|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6} \sqrt{m^2 + 8m + 17}$$

گام سوم: با آزمایش گزینه‌ها می‌بینیم که $m = -2$ جواب معادله است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۳

پاسخ تشریحی

گام اول: $x_1 = 3a$ و $x_2 = 2b$ ریشه‌های معادله هستند، پس در روابط S و P صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 3a + 2b = \frac{7}{2b} \\ P = x_1 x_2 = (3a)(2b) = \frac{6a}{b} \end{cases}$$

$$6ab = \frac{6a}{b} \Rightarrow ab = \frac{a}{b} \xrightarrow{a \neq 0} b = \frac{1}{b} \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

گام دوم: از رابطه P داریم:گام سوم: هر مقدار b را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$b = -1 \xrightarrow{\text{رابطه } S} a = -\frac{1}{2} \quad \text{که با شرط } a < b \text{ در تناقض است.}$$

$$b = 1 \xrightarrow{\text{رابطه } S} a = \frac{1}{2}$$

$$a + b = \frac{3}{2}$$

گام چهارم: مطلوب نهایی مسئله برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۴

پاسخ تشریحی

گام اول: در معادله فعلی داریم:

گام دوم: جواب‌های معادله مجهول را $\alpha' = \frac{2}{\alpha} + 1$ و $\beta' = \frac{2}{\beta} + 1$ در نظر می‌گیریم:

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{2}{\alpha} + 1 + \frac{2}{\beta} + 1 = \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{2S}{P} + 2 = 8$$

$$P' = \alpha'\beta' = \left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) = \frac{4}{\alpha\beta} + \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{4 + 2S}{P} + 1 = -1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۵

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا مجموع صفرهای تابع را محاسبه می‌کنیم. (هواستون باشه چون $p + q$ رو می‌فوایم، لازم نیست بریم سراغ بهدست آوردن p و q)

$$f(x) = 0 \Rightarrow 5 + (x+2)(x-4) = 0 \Rightarrow 5 + x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = p+q = -\frac{b}{a} = 2$$

گام دوم: مقدار مینیمم تابع (عرض نقطه مینیمم سهمی) را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4(-3)}{4 \times 1} = -4 \Rightarrow s = -4$$

گام سوم: عرض نقطه برخورد نمودار تابع با محور y ها را پیدا می‌کنیم. برای این کار کافی است x را در معادله تابع، برابر صفر قرار دهیم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 2(0) - 3 = -3 \Rightarrow r = -3$$

$$\frac{r+s}{p+q} = \frac{-3-4}{2} = \frac{-7}{2} = -3.5$$

گام چهارم: حاصل عبارت مورد نظر را به دست می‌آوریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۶

پاسخ تشریحی

گام اول: طول و عرض مستطیل را به ترتیب a و b می‌گیریم و دستگاه مقابل را می‌سازیم:

$$\begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} b \\ a - b = 2\sqrt{5} - 4 \end{cases}$$

گام دوم: دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} b - b = 2\sqrt{5} - 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} b = 2(\sqrt{5}-2) \Rightarrow b = \frac{4(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5} - 1$$

گام سوم: محیط مستطیل را حساب می‌کنیم:

$$\text{محیط} = 2(a+b) = 2(2) = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۷

با توجه به شکل داده شده، ابتدا معادله خط L را می‌نویسیم. شیب این خط $\frac{3}{4}$ و عرض از مبدأ آن ۳ است پس معادله خط L عبارت است از:

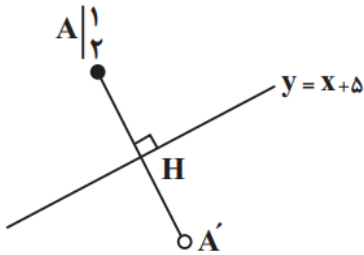
$$y = mx + h \rightarrow y = \frac{3}{4}x + 3 \xrightarrow{\times 4} 4y = 3x + 12 \rightarrow 3x - 4y + 12 = 0$$

حال فاصله نقطه $A(6, -3)$ را از این خط بدست می‌آوریم:

$$d = \frac{|3 \times 6 - 4(-3) + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{42}{5} = 8.4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۸

در ابتدا مختصات H (تصویر A روی خط $y = x + 5$) را بدست می‌آوریم، می‌دانیم AH عمود بر خط $y = x + 5$ است پس شیب آن -1 است و داریم:

$$m_{AH} = -1 \xrightarrow{\text{معادله خط } AH} y = -x + 3$$

و با تلاقی دو خط، مختصات H را پیدا می‌کنیم

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x + 5 \end{cases} \rightarrow x = -1, y = 4 \rightarrow H = (-1, 4)$$

و در نهایت چون H وسط A و A' است داریم:

$$H = \frac{A + A'}{2} \rightarrow A' = 2H - A \rightarrow x_{A'} = -2, y_{A'} = 6 \rightarrow A'(-2, 6) \rightarrow a = -2, b = 6 \rightarrow 2b - a = 15$$

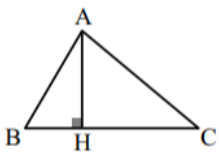
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۹

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید، ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است و از نقطه‌ی A می‌گذرد. ابتدا شیب BC را بدست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{-2-0}{1-3} = 1$$

$$m_{AH} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AH} = -1 \text{ و } A(-1, 2) \Rightarrow AH \text{ معادله‌ی } y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x + 1$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۰

گام اول: ابتدا $x = 5$ را در معادله جای گذاری می کنیم تا مقدار m به دست آید:

$$2\sqrt{2x-1}-x=m \Rightarrow 2\sqrt{2(5)-1}-5=m \Rightarrow 2 \times 3-5=m \Rightarrow m=1$$

گام دوم: با توجه به این که $m=1$ ، معادله را بازنویسی می کنیم و سپس آن را حل می کنیم:

$$2\sqrt{2x-1}-x=1 \Rightarrow 2\sqrt{2x-1}=1+x \xrightarrow{\text{دوطرف به توان ۲}} 4(2x-1)=(1+x)^2$$

$$\Rightarrow 8x-4=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$$

پس ریشه دیگر برابر ۱ است. توجه کنید که چون در گزینه ها «هیچ مقدار» نداریم، نیازی به بررسی کردن $x=1$ در معادله اولیه نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۱

گام اول: قرینه نقطه A روی محور y ها قرار دارد؛ پس مختصات آن را $A'(0, y_0)$ در نظر می گیریم.

گام دوم: پاره خط AA' بر خط داده شده (محور تقارن) عمود است، پس حاصل ضرب شیب های آن ها -1 می شود.

$$m_{\text{خط}} = -\frac{1}{4}, m_{AA'} = \frac{y_0-6}{2}$$

$$\xrightarrow{m_{\text{خط}} m_{AA'} = -1} -\frac{1}{4} \left(\frac{y_0-6}{2} \right) = -1 \Rightarrow y_0-6=8 \Rightarrow y_0=-2$$

مختصات نقطه قرینه، $A'(0, -2)$ است.

گام سوم: نقطه وسط پاره خط AA' باید روی خط داده شده قرار بگیرد. (زیرا A و A' فاصله برابری از خط دارند).

$$\Rightarrow M = \frac{A+A'}{2} \Rightarrow M(1, 2)$$

$$(1) + 4(2) = k \Rightarrow k=9$$

گام چهارم: مختصات نقطه M را در معادله خط داده شده قرار می دهیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۲

نقاط برخورد منحنی و خط را به دست می آوریم:

$$2x^2 - 5x + 7 = 5x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow a+b+c=0 \quad \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{8}{2}=4 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

طول پاره خط AB را بدست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-15)^2} = AB = \sqrt{224} = 2\sqrt{56}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۳

فرض می‌کنیم $C \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha + 2 \end{vmatrix}$ ، چون مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است پس $m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$ لذا:

$$\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{vmatrix} \Rightarrow m_{AC} = \frac{\alpha + 2 - 2}{\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

$$m_{BC} = \frac{\alpha + 2 + 5}{\alpha - 5} = \frac{\alpha + 7}{\alpha - 5}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha + 7}{\alpha - 5} = -1 \Rightarrow \alpha^2 + 7\alpha = -\alpha^2 + 4\alpha + 5 \Rightarrow 2\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = +1 \\ \alpha = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$CA \perp CB \Rightarrow m_{CA} \times m_{CB} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2-m} \times \frac{2}{1-m} = -1 \Rightarrow 0 = m^2 - 4m \Rightarrow m = 0 \text{ یا } 4$$

۳۴

به ازای $m = 0$ داریم: $CA = CB = \sqrt{10}$ پس $S = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$

به ازای $m = 4$ داریم: $CA = 3\sqrt{2}$, $CB = \sqrt{2}$ پس $S = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 3$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۵

ابتدا مختصات نقطهٔ وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A(-2, 4) \\ B(2, -6) \end{cases} \xrightarrow{\text{وسط } M} M\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{4-6}{2}\right) \Rightarrow M(0, -1)$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ M را تا خط $y = -\frac{3}{4}x + 2$ محاسبه می‌کنیم:

$$y = -\frac{3}{4}x + 2 \xrightarrow{\times 4} 4y = -3x + 8 \Rightarrow 3x + 4y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} M(0, -1) \\ 3x + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{|3(0) + 4(-1) - 8|}{\sqrt{9+16}} = \frac{12}{5} = 2.4$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)